1.7) a) $S = \{[x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

Busco la solución de $x_1+2x_2+3x_3=0$ (sist. homogéneo)

$x_1 = -2x_2 - 3x_3$

Entonces $\bar{X}$ que cumpla será de la forma:

$(x_1, x_2, x_3) = (-2x_2 - 3x_3; x_2; x_3) \rightarrow$

$\rightarrow (x_1, x_2, x_3) = x_2 . (-2; 1; 0) + x_3 . (-3; 0; 1)$

Por lo tanto $S = gen\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$.

Para saber si es minimal veo si es LI:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \to 3F1 - 2F2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

quedó triangulada superiormente y ninguna fila se anuló, por lo tanto $gen\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$ es un gen. minimal.

b) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz asociada es A y trabajo con ella.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \to 3F1 - F2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \ \text{(I)} \\ \rightarrow 4x_2 + 8x_3 = 0 \ \text{(II)} \end{matrix}$$

de (II) $\rightarrow$ $\underline{x_2 = -2x_3}$, en (I) $\rightarrow x_1 - 2.(2x_3) + 3x_3 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x_1 - x_3 = 0 \rightarrow \underline{x_1 = x_3}$

Entonces un $\bar{x}$ que cumpla será de la forma:

$(x_1, x_2, x_3) = (x_3, -2x_3, x_3) = x_3 . (1; -2; 1)$

Entonces un gen. minimal de S es $\{(1,-2,1)\}$

1.7) c) $S=\{p\in\mathbb{R}_3[x] : \underbrace{\int_{-1}^{1} p(x)\,dx=0}_{\text{I}},\ \underbrace{\int_{-1}^{1} x\,p(x)\,dx=0}_{\text{II}}\}$

Un polinomio genérico de $\mathbb{R}_3[x]$ es $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

I $\rightarrow \int_{-1}^{1}(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\,dx=0 \rightarrow$

$\rightarrow a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\frac{a_3}{4}x^4\Big]_{-1}^{1}=0 \rightarrow$

$\rightarrow \left(a_0\cdot 1+\frac{a_1}{2}\cdot 1+\frac{a_2}{3}\cdot 1+\frac{a_3}{4}\cdot 1\right)-\left(a_0\cdot(-1)+\frac{a_1}{2}\cdot 1+\frac{a_2}{3}\cdot(-1)+\frac{a_3}{4}\cdot 1\right)=0 \rightarrow$

$\rightarrow 2a_0+\frac{2}{3}a_2=0 \rightarrow a_0=-\frac{2}{6}a_2 \rightarrow \underline{a_0=-\frac{1}{3}a_2} \rightarrow \underline{a_2=-3a_0}$

II $\rightarrow \int_{-1}^{1} x\cdot(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)\,dx=0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{a_0}{2}x^2+\frac{a_1}{3}x^3+\frac{a_2}{4}x^4+\frac{a_3}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}=0 \rightarrow$

$\rightarrow \left(\frac{a_0}{2}\cdot 1+\frac{a_1}{3}\cdot 1+\frac{a_2}{4}\cdot 1+\frac{a_3}{5}\cdot 1\right)-\left(\frac{a_0}{2}\cdot 1+\frac{a_1}{3}\cdot(-1)+\frac{a_2}{4}\cdot 1+\frac{a_3}{5}\cdot(-1)\right)=0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2}{3}a_1+\frac{2}{5}a_3=0 \rightarrow a_1=-\frac{2}{5}a_3\cdot\frac{3}{2} \rightarrow \underline{a_1=-\frac{3}{5}a_3} \rightarrow \underline{a_3=-\frac{5}{3}a_1}$

Reemplazo estos valores en el polinomio genérico:

$p(x)=a_0+a_1x+\underbrace{(-3a_0)}_{a_2}x^2+\underbrace{\left(-\frac{5}{3}a_1\right)}_{a_3}x^3 \rightarrow$

$\to P(x) = a_0 . (1-3x^2) + a_1 . \left(x - \frac{5}{3}x^3\right)$

Entonces, un generador sería: $\left\{ (1-3x^2), \left(x-\frac{5}{3}x^3\right) \right\}$ y es minimal ya que son de distinto grado.

d) $S = \{ y \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : y' + \lambda y = 0 \}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$y' + \lambda y = 0 \to$ Reescribo la ec. $\to \frac{dy}{dx} = -\lambda y \to \frac{dy}{y} = -\lambda dx \to$

$\to$ Integro de ambos lados $\to \ln(|y|) + c = -\lambda x + c \to$

$\to \ln(|y|) = -\lambda x + \underbrace{c - c}_{\text{otra constante}} \to \ln(|y|) = -\lambda x + c \to$

$\to |y| = e^{-\lambda x + c} \to |y| = e^{-\lambda x} . \underbrace{e^{c}}_{\text{ESCALAR}} \to$ el módulo lo puedo

sacar ya que sea + o −, el signo queda en el escalar y:
$y = C . e^{-\lambda x}$, entonces un gen. minimal es: $\{ e^{-\lambda x} \}$

e) $S = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X \right\}$

Reescribo la ec.:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 2x_{11} & 3x_{12} \\ 2x_{21} & 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} \\ 3x_{21} & 3x_{22} \end{bmatrix}$$

<u>Ecuaciones</u>

$2x_{11} = 2x_{11}$ ✓

$3x_{12} = 2x_{12} \to \cancel{x_{12} = \frac{2}{3} x_{12} \to \ldots} \to x_{12} = 0$

$2x_{21} = 3x_{21} \to x_{21} = 0$

$3x_{22} = 3x_{22}$ ✓

Entonces $\bar{X}$ que cumpla será: $\begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \to$

$$\to \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = x_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto un generador es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y es minimal porque no son múltiplos.